

量子博弈论: 方法, 实现以及应用

蔡家麒*

物理学院, 华中科技大学, 武汉

(Dated: 2018 年 5 月 28 日)

量子物理的发展已经为信息学, 控制理论, 乃至社会科学的诸多方面提供了新的发展和机遇. 在这里, 我首先回顾了 1999 年以来, 量子博弈论基本概念的建立, 于其上的争论与发展. 量子博弈论主要建立在两大概念的基础之上, 一是线性希尔伯特空间起到了扩充策略空间的功能, 二是纠缠提供了非经典的概率. 同时, 量子硬件的发展使得直接验证量子博弈理论成为实验上的可能, 作为例子, 我将展示如何在 Transmon 量子比特上完成博弈过程. 我发现, 其中退相干对博弈策略的具有巨大的影响, 以及量子资源 (即量子纠缠熵, 量子失谐, 量子相干等) 和博弈策略之间具有潜在的关联, 细致的研究将交付有兴趣的读者. 最后, 我想指出对量子博弈论的研究是基础性的, 但是它也具有潜在和深远的应用价值.

PACS numbers: 03.67.-a, 02.50.Le, 03.65.-w, 89.80.+h

CONTENTS

前言	1
I. 简介	1
II. 量子博弈过程	2
II.1. 翻硬币游戏: 零和博弈	2
II.2. 量子囚徒困境	3
II.3. 其他一些博弈模型	4
III. 真实体系的实现	4
IV. 量子失谐与量子增益	5
V. 展望	5
References	6

前言

我首先假定作者对量子力学具有不低于本科层次的了解, 量子信息和量子计算现在有一系列简介, 对于无物理背景但有数学背景的读者, 特别推荐 preskill 的讲义 [1]. 对于无物理背景但有工科背景的读者, 特别

推荐 Nakahara 的教材 [2]. 此外, 这篇文章不是一个综述, 其中除了有具体引用的叙述之外, 诸多地方还有很多自己的发挥, 由于不是正式刊发, 读者可以通过邮件联系, 以便及时斧正错误之处.

I. 简介

量子博弈论第一次被提出是 1999 年, 首先是应用于扩展的零和博弈模型 [3], 接下来就是一类囚徒困境模型的量子扩展版本被发现 [4, 5]. 但是事实上, 由于量子信息理论的事实上是一个广延的理论, 在量子通讯中该类博弈模型早已存在, 因此量子策略其实在量子通讯的初期研究中就已经得到了十足的发展.

我们知道, 经典博弈理论中的混合策略, 实际上是基于概率理论, 并可以通过现代测度理论完全的给出数学表达, 这样的一类博弈理论最终会成为一类泛函的最优化问题. 而量子力学则是建立在线性希尔伯特空间上的, 其物理实在是由变分原理 (泛函的最优化问题) 和概率统计诠释给出的. 将经典博弈理论扩充到量子范畴是自然的, 因为建立在线性希尔伯特空间上的量子博弈论能够完全包含经典的博弈理论, 与此同时, 量子理论能够描述更多的物理实在, 例如收益之间的关联可以清晰的利用量子纠缠度量, 因此”理性个体”的基本经典博弈论假设, 在这里得到了十足的扩充 [6–8]. 此外, 量子理论是由一个线性代数描述的理论, 具有并行性, 这可以用于扩大经典博弈理论的策略集.

* caidish@hust.edu.cn

在量子理论进入博弈论之后，经典博弈论的类比也加深了我们对量子信息的理解，例如纠缠态，量子失谐等几何量子信息量可能和博弈论有着深刻的联系 [6–8]。量子理论同样也对博弈论的贡献很大，复杂博弈论关系可以被多个量子比特之间的过程描述 [9–11]，在现实中，物理学家可以使用量子通用计算机对这些玩具模型进行模拟，从而提高了我们对量子博弈论的信心。当然，现在的量子通用机还是不完全的，其一体现在量子比特的数目不够多，但是即使是现在的单比特 NMR 其实就已经足够用于研究量子博弈论了，并且现在的超导量子比特技术已经得到了十足的发展，10 到 20 个量子比特的制备已经很成熟了，在 10 个量子比特中，我们也看到了纠缠的信号 [12]。此外，量子比特具有退相干的特性，有的时候量子比特集群的保真度随着时间会逐渐下降，我之后会介绍如何在有保真度下降的情况下进行量子博弈。

这篇论文的内容如下，在第 II 节，我会解释初期发展的两个量子博弈模型，同时我将其推广到广泛的线性希尔伯特空间上，并进一步允许一些非经典的策略博弈。在第 III 节，我将解释如何在真实的量子体系中实现简单的量子博弈模型，同时简单的指出其中的退相干过程对量子信息的影响。在第 IV 节，我们将考虑更为一般的量子信息度量，量子失谐，解释其中这种量子信息特征量在解释量子博弈中量子增益起到的作用。最后在第 V 节，我们做出今后的展望。

II. 量子博弈过程

II.1. 翻硬币游戏：零和博弈

这是第一个被明确提出是量子博弈过程的思想实验 [3]，游戏规则如下：经济学高材生 Alice(A) 和物理学高材生 Bob(B) 在玩一个翻硬币的游戏：不透明的盒子里有一个硬币，初始这个硬币的状态是已知的，例如朝上，然后轮番选择翻转或者不翻转硬币，先是 B 然后是 A 然后是 B。最后打开盒子，硬币如果正面向上则 B 获胜，反之则 A 获胜。

A 是一个经济系高材生，他立即反应到，这是一个典型的零和博弈，其中的纳什均衡处在，两人都选择混合策略，最后两者都有 50% 的概率取得游戏的胜利。而 B 是一个物理系高材生，他立即动手去制作了一台

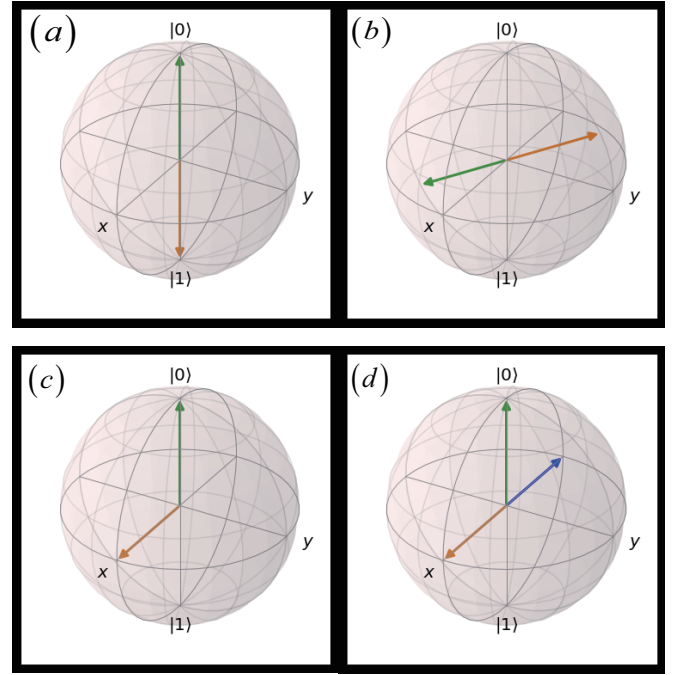


图 1. 如同所示的布洛赫球中，(a)，硬币由上（绿色）或者下（橙色）表示，(b) 经典的策略都是让矢量反向。(c) 而量子策略允许态矢量旋转 $\frac{\pi}{2}$ (d) 从而对于 B 具有一套“最优决策”

玩这个游戏的仪器。最后，这个游戏仪器在公证处公证，确保了这个仪器的公平性。

但是，让人惊讶的游戏结果是，每一次都是 B 取得的胜利。为什么呢？因为 B 制作的这个仪器是一个量子硬币游戏，虽然是公平的，但是经济系的 A 只会使用经典策略，物理系的 B 则选择了量子策略。

我们重新陈述这个游戏如下，我们定义，硬币朝上和朝下是两个不同的量子力学态矢，

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 $|\uparrow\rangle$ 代表硬币向上，而 $|\downarrow\rangle$ 则代表硬币向下。对于经典的策略（即经济学），可以选择使用翻转硬币操作 P ，即将硬币向上变换成向下，向下变换成向上；可以选择经典的策略 I ，即保持硬币的状态。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

为了简便，在下面的推导中，我取 ϕ 等于 0，而图中展现了另一种 ϕ 取值的情况。

对于量子的策略，则任意的么正操作 U 都是允许

的:

$$|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \quad (2)$$

于是, B 现在有一系列参数化的策略集合, 出于简便, 选择策略: $W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 那么硬币会被映射到叠加态.

我们现在考虑 A 使用混合策略, 即:

$$A = pI + (1-p)P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

那么, 过程 W, A, W 之后,

$$|u1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|u2\rangle = A|u1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} |u2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

我们发现永远是 B 获胜, 无论 A 如何精心的选择概率 P .

II.2. 量子囚徒困境

接下来是 Eisert 提到的另一个量子博弈模型 [5]: 量子囚徒困境. 我们知道, 所谓的经典囚徒困境是一个二人非零和博弈, 对于理性博弈者, 相互背叛的收益总和比相互合作的收益总和要小, 即纳什均衡是两人都不合作, 而帕累托最优是两人都合作. 而量子的版本则可以让两人规避这一困境.

这个模型是这样的, 两个人每人拥有一个量子比特, 每人都可以对自己的比特进行操作, 有一个套测量装置, 根据测量结果去进行奖励 (构建收益矩阵), 我们用 0 代表抵赖 (C), 1 代表坦白 (D), 用数学模型来说, 那就是: 考虑两个 2 维希尔伯特空间的直积希尔伯特空间 $|\alpha, \alpha'\rangle, \alpha, \alpha' \in \{0, 1\}$, 考虑经典囚徒困境的收益:

$$\mathcal{L} \equiv rP_{00} + pP_{11} + tP_{10} + sP_{01}$$

现在经典的博弈过程如下, 我们首先将两个人的量子比特利用么正算符 \mathcal{J} 制备一次, 然后两个人分别

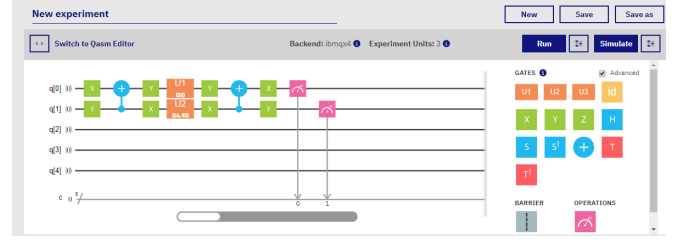


图 2. 可以在量子云计算平台上利用量子计算门序列 (quantum circuits) 去探究量子囚徒困境.

对自己的比特使用 U_a, U_b 进行抉择, 最后用 \mathcal{J}^\dagger 解制备, 然后进行测量. 首先我们需要对策略空间进行刻画, 注意到策略空间没有额外的约束, 一个自然的选择是:

$$U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

这里的参数化 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, 构成 $SU(2)$ 的一组参数表示.

显然可见, 合作和坦白两个经典策略已经包括在此量子扩展策略中, 坦白 $D = U(\pi, 0)$ 和合作 $C = U(0, 0)$.

我们再来考虑约束 \mathcal{J} , 为了回到经典的情况我们需要条件:

$$[\mathcal{J}, K] = 0, K = D \otimes D, C \otimes D, D \otimes C$$

, 以及 \mathcal{J} 是么正的. 这类可以回到经典策略集合的量子扩展, 被称作正则的. 在经典混合策略集 $S_0 = \{U(\theta, \phi = 0)\}$, 概率总可以分解为两者分别概率抉择的乘积 (阿贝尔分解).

这类 \mathcal{J} 可以被参数化为:

$$\mathcal{J} = \exp\left(\frac{i\gamma D \otimes D}{2}\right)$$

经过简单的计算, 我们可以得到如下结果:

1. 如果策略空间是 S_0 这一特殊阿贝尔类型, 则问题退回到经典囚徒困境: 纳什均衡总不是帕累托最优.
2. 如果策略空间是任意的 U 这一 $SU(2)$ 类型, 则就有可能存在一个量子策略, 使得纳什均衡同时是帕累托最优.

3. 纠缠程度由 γ 刻画, 对于不同的收益矩阵, 具有不同的结果. 对于 $\gamma = 0$, 可以证明相互背叛才是占优策略, 量子博弈失去作用, 注意到极限 $\gamma = 0$ 是无纠缠极限. 对于 $\gamma = \frac{\pi}{2}$ 达到最大纠缠, 存在一个没有经典对应的策略, 使得有纳什均衡成为帕累托最优.

我们看到, 量子纠缠在其中起到了决定性的作用. 量子信息理论告诉我们, 量子纠缠实际上是一种量子资源, 并且和所谓的费雪信息度量, 量子失谐度量, 量子相干度量有关. 我们最后会回到这个问题.

II.3. 其他一些博弈模型

近十几年, 量子博弈模型得到了十足的发展, 在这两个博弈模型基础上, 得到了一系列新奇的量子博弈模型. 例如 Monty Hall 模型 [11], battle of sexes game 模型 [13], 少数者模型 [13] 等等 [6–10, 14–18]. 在此就不做列举工作了.

III. 真实体系的实现

现有的量子计算, 量子模拟技术就可以很好的探究量子博弈论问题了, 在 [15, 19, 20] 中, 利用线性光学设备, 就能很好的研究量子博弈论的量子增益, 其中 [15], 此工作得到了量子纠缠不是量子增益的必要条件, 量子失谐在此中扮演了更为重要的角色. 在 NMR 中, 杜组率先实现了量子博弈 [21], 同时扩展了上述囚徒困境 $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ 的情况. 弱测量作为一种量子测量放大器, 现在也可以服务于测量量子博弈中的信号 [10]. 事实上, 现在的 Transmon 量子比特等, 也能通过一些特殊的门操作, 例如和乐门 [22] 实现量子零和博弈和囚徒困境.

图中我们的量子门是使用 IBM 公司提供的云量子计算服务实现的, 在一个任意构架的量子比特中, 我们也可以通过构造各种门来实施这个量子博弈的模拟. 我们现在来考虑几何量子计算如何实现量子博弈需要的各种门. 我们首先考虑任意量子门的实现, 使用两个微波场 Ω_i ($i = 0, 1$) 和初始相位 ϕ_i 来共振地耦合 Transmon 三个能级的跃迁 $|0\rangle$, $|e\rangle$ 和 $|1\rangle$. $|0\rangle$ and $|1\rangle$

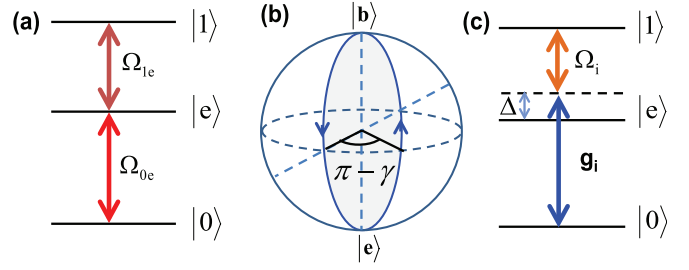


图 3. 量子比特能级的示意图.(a)Transmon 的三能级. (b) 和乐量子门的循环演化. (c) 失谐耦合.

是量子比特态. 系统的哈密顿现在可以写作:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \Omega_{0e} e^{i\phi_0} |0\rangle\langle e| + e^{i\phi_1} \Omega_{1e} |e\rangle\langle 1| + \text{H.c.} \\
 &= \Omega e^{i(\phi_1 - \pi)} \left(\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |0\rangle\langle e| - \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle\langle e| \right) + \text{H.c.} \\
 &\equiv \Omega e^{i(\phi_1 - \pi)} |b\rangle\langle e| + \text{H.c.}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中 $\phi = \phi_0 - \phi_1 + \pi$, $\Omega = \sqrt{\Omega_{0e}^2 + \Omega_{1e}^2}$, $\tan(\theta/2) = \Omega_{0e}/\Omega_{1e}$, 亮态是 $|b\rangle = \sin(\theta/2)e^{i\phi}|0\rangle - \cos(\theta/2)|1\rangle$. 系统的动力学现在被耦合过程控制: $|b\rangle$ and $|e\rangle$. 因此, 几何量子门的循环条件可以满足, i.e., $\int_0^T \Omega dt = \pi$, 通过选择合适的 θ 和/或 ϕ , 我们可以得到不同的量子门. 同时, 一个任意的单比特态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \equiv [\alpha \sin(\theta/2)e^{-i\phi} - \beta \cos(\theta/2)]|b\rangle + [\alpha \cos(\theta/2) + \beta \sin(\theta/2)e^{-i\phi}]|d\rangle$, 其中的暗态是 $|d\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\phi}|1\rangle$, 因此在演化过程中, 不存在 $|d\rangle$ and $|b\rangle$ 之间的跃迁. 因此, 得到的门是所谓的和乐门, 这样的门是在 Transmon 中具有高保真度的.

两比特门稍微麻烦一些, 但是主要的思想还是利用循环演化去获得一个两比特门, 有了任意单比特门和一个子空间两比特门, 我们实际上就可以完成任意的两比特量子计算和量子模拟了. 有兴趣的读者可以参考 [22].

这样, 我们就可以在 Transmon 上高保真的模拟量子博弈了, 但是, 退相干是不可避免的, 退相干的作用如何呢?

在量子光学中, 马尔可夫近似将会给出主方程, 这

就是在退相干作用下系统的方程, 对于 Transmon, 我们有:

$$\dot{\rho}_1 = i[\rho_1, H_1] + \sum_{j=0}^1 \left[\frac{\Gamma_1^j}{2} \mathcal{L}(\sigma_{j,e}^-) + \frac{\Gamma_2^j}{2} \mathcal{L}(\sigma_{j,e}^z) \right], \quad (4)$$

其中 ρ_1 系统的密度矩阵, 以及 $\mathcal{L}(A) = 2A\rho_1 A^\dagger - A^\dagger A\rho_1 - \rho_1 A^\dagger A$ 是系统的刘维尔算符: $A, \sigma_{0,e}^- = |0\rangle\langle e|$, $\sigma_{1,e}^- = |e\rangle\langle 1|$ 和 $\sigma_{j,e}^z = (-1)^j(|e\rangle\langle e| - |j\rangle\langle j|)$. 此外, κ , Γ_1^j 和 Γ_2^j 分别是系统的耗散率, $\{j, e\}$ 之间的耗散和退相干.

具体来说, 在量子零和博弈中, 可以想象, 退振幅会让图 1 中箭头内部蜷缩, 退相干则会导致矢量的旋转, 从而导致 A 有一定的概率获得游戏的胜利. 如何在退相干环境中寻找博弈的最优解, 目前还是一个开放问题. 在文献 [23] 中, 作者清晰的计算了特定退相干下的收益函数. 然而, 真实的情况要比这复杂的多. 此外, 除了退相干, 量子大型阵列系统还会经历偶然增益, 控制脉冲也会有失稳的情况.

IV. 量子失谐与量子增益

我们接下来讨论量子博弈中的量子信息问题. 量子纠缠是量子资源的一种度量, 通常利用冯诺依曼熵, Renyi 熵, 对角熵, 量子失谐等量去刻画, 其实提到的纠缠参数 γ 也可以作为两量子比特纠缠的刻画. 近年有些参考文献提到, 量子纠缠是使得量子博弈相对经典博弈具有增益的关键. 但其实这个说法是有失偏颇的. 例如光学量子体系中实现 [15] 量子纠缠指示的, 在无纠缠时, 依然会出现量子博弈的量子增益. 并且, 我们知道光学体系退相干的时间非常长, 由于退相干效应导致量子增益的可能性不大. 更进一步的研究表明, 除了量子纠缠, 还有一些量子关联的特征, 他们主导了此时的量子增益, 例如量子失谐.

量子失谐的定义是:

$$\delta(B|A) = S(\rho_a) - S(\rho_{ab}) - \max_{\{E_a\}} [S(\rho_a^d) - S(\rho_{ab}^d)]$$

即冯诺依曼熵的差减去, 历经所有冯诺依曼测量之后

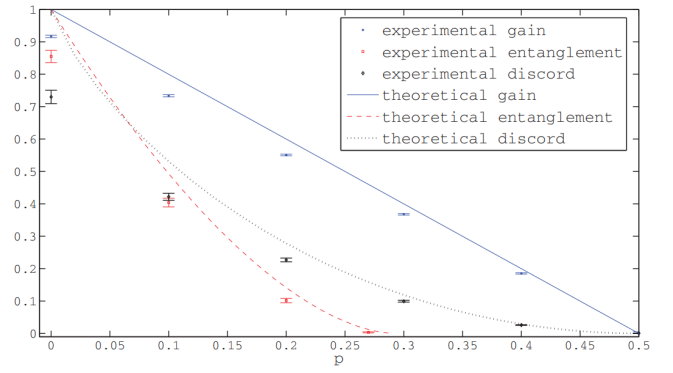


图 4. 量子失谐和量子博弈中的量子增益: 实验结果来自 [15].

的冯诺依曼熵的差的最大值, i.e.

$$\begin{aligned} \rho_a &= \text{Tr}_b[\rho_{ab}] \\ \rho_a^d &= \text{Tr}_b \left[\sum_j E_a^j \rho_{ab} E_a^j \right] \\ \rho_{ab}^d &= E_a^j \rho_{ab} E_a^j \end{aligned}$$

此时, 量子失谐就可以给出对量子博弈中无量子纠缠量子增益的解释, 如图 4 所示. 更多的无纠缠量子增益实验也被找到了 [24]. 量子失谐是不是扮演了在量子博弈过程中更加基本的角色呢? 然而, 拥有量子策略的决策者, 即使在既无纠缠, 有无失谐的情况下, 也能获得量子优势 [25]. 究竟什么能够给出主导量子策略与经典策略不同的度量, 还有待学者们的探索.

V. 展望

现在, 量子信息逐渐进入多体领域. 在量子多体理论中, 一个体系常常伴随着多种机制的相互竞争关系. 例如, 我们可以在多体局域系统中研究安德森局域和多体局域的相互竞争关系, 量子信息就在其中扮演了重要的角色 [26, 27]. 我们是否能够在多体领域中引入量子博弈, 这是值得思考的一个方向.

在引言中, 我们提到, 为什么博弈论在引入量子理论是自然的 — 是因为博弈论具有某种程度上的泛函极值特征, 我们对物理系统的认知是基于最小作用量原理的, 同样也是一个泛函极值问题. 同时, 当我们定义人类和物理系统之间的费雪信息转移 (也是一种博弈关系) 时, 拉格朗日量可以自然的从费雪信息中得到 [28]. 有时, 这样的提取信息过程是需要巧妙的设计的

和非平庸的猜测的, 例如祁晓亮等证明的 [29], 我们仅仅从单个本征态关联谱矩阵 (在物理上, 这是一类非常重要的观测量) 的本征函数中, 就几乎可以完成对局域哈密顿的重构, 但是如何从博弈论角度, 解释这种特殊的博弈过程, 是否有从物理系统中提取哈密顿的最优决策? 我们能否从量子博弈的角度, 进一步的思考其中内在的关联? 这也是一个值得思考的方向. 此外, 我们知道费雪信息还在量子控制算法理论中扮演着非常

基本的角色, 这几者的勾连和相互对偶, 有可能带来三者交叉学科 (量子信息, 博弈论, 量子控制) 的繁荣.

从这个角度上来说, 量子博弈模型其实并不是一个玩具模型, 在某种层面上, 对量子博弈模型的研究, 丰富了我们对于量子信息理论的理解, 并且可能对我们理解, 发现新的物理事实和物理对偶关系有着潜在的价值. 同时, 量子博弈模型是实验可行性非常高的一类模型, 这些模型也将为我们测试量子计算机和量子信息处理过程并衡量其效率, 有着启发性的影响.

-
- [1] J. Preskill, *Physics Today*, 24 (1998), arXiv:0512125 [quant-ph].
- [2] M. Nakahara and T. Ohmi, *Quantum Computing From Linear Algebra* **24**, 5 (2008).
- [3] D. A. Meyer, *Physical Review Letters* **82**, 1052 (1999), arXiv:9804010 [quant-ph].
- [4] S. C. Benjamin and P. M. Hayden, *Physical Review Letters* **87**, 69801 (2001), arXiv:0003036 [quant-ph].
- [5] J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, *Physical Review Letters* **83**, 3077 (1999), arXiv:9806088 [quant-ph].
- [6] S. J. van Enk and R. Pike, *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **66**, 2 (2002), arXiv:0203133 [quant-ph].
- [7] J. Shimamura, K. Özdemir, F. Morikoshi, and N. Imoto, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* **328**, 20 (2004), arXiv:0404151 [quant-ph].
- [8] E. W. Piotrowski and J. Sl, arXiv:quant-ph/0211191 **42**, 1089 (2002).
- [9] T. Ichikawa and I. Tsutsui, *Annals of Physics* **322**, 531 (2007), arXiv:0602178 [quant-ph].
- [10] X. P. Liao, X. Z. Ding, and M. F. Fang, *Quantum Information Processing* **14**, 4395 (2015).
- [11] A. P. Flitney and D. Abbott, *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **65**, 4 (2002), arXiv:0109035 [quant-ph].
- [12] C. Song, K. Xu, W. Liu, C. P. Yang, S. B. Zheng, H. Deng, Q. Xie, K. Huang, Q. Guo, L. Zhang, P. Zhang, D. Xu, D. Zheng, X. Zhu, H. Wang, Y. A. Chen, C. Y. Lu, S. Han, and J. W. Pan, *Physical Review Letters* **119**, 1 (2017), arXiv:1703.10302.
- [13] S. C. Benjamin, , 1 (2000), arXiv:0008127 [arXiv:quant-ph].
- [14] T. Ichikawa, I. Tsutsui, and T. Cheon, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** (2008), 10.1088/1751-8113/41/13/135303, arXiv:0702167 [quant-ph].
- [15] C. Zu, Y. X. Wang, X. Y. Chang, Z. H. Wei, S. Y. Zhang, and L. M. Duan, *New Journal of Physics* **14** (2012), 10.1088/1367-2630/14/3/033002.
- [16] Y. J. Han, Y. S. Zhang, and G. C. Guo, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* **295**, 61 (2002).
- [17] J. Du, H. Li, X. Xu, X. Zhou, and R. Han, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* **302**, 229 (2002), arXiv:0110122v2 [arXiv:quant-ph].
- [18] J. A. Miszczak, P. Gawron, and Z. Puchała, *Quantum Information Processing* **11**, 1571 (2012), arXiv:1108.0642.
- [19] R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther, and A. Zeilinger, *New Journal of Physics* **9** (2007), 10.1088/1367-2630/9/6/205, arXiv:0708.1129.
- [20] W. F. Balthazar, M. H. Passos, A. G. Schmidt, D. P. Caetano, and J. A. Huguenin, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **48** (2015), 10.1088/0953-4075/48/16/165505.
- [21] J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou, and R. Han, *Physical Review Letters* **88**, 4 (2002), arXiv:0104087 [quant-ph].
- [22] Z.-p. Hong, B.-j. Liu, J.-q. Cai, X.-d. Zhang, Y. Hu, Z. D. Wang, and Z.-y. Xue, **022332**, 4 (2018).
- [23] A. P. Flitney and D. Abbott, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38**, 449 (2005), arXiv:0408070v2 [arXiv:quant-ph].
- [24] A. Maldonado-Trapp, P. Solano, A. Hu, and C. W. Clark, *New Journal of Physics* **19** (2017), 10.1088/1367-2630/aa6cf4, arXiv:1604.07351.
- [25] Z. Wei and S. Zhang, *Information and Computation* **256**,

- 174 (2017), arXiv:1502.0207.
- [26] J. A. Kjølshavn, J. H. Bardarson, and F. Pollmann, *Physical Review Letters* **113**, 1 (2014), arXiv:1403.1568.
- [27] J. Smith, A. Lee, P. Richerme, B. Neyenhuis, P. W. Hess, P. Hauke, M. Heyl, D. A. Huse, and C. Monroe, *Nature Physics* **12**, 907 (2016), arXiv:1508.07026.
- [28] B. R. Frieden and B. H. Soffer, *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* **52** (1995).
- [29] X.-L. Qi and D. Ranard, , 1 (2017), arXiv:1712.01850.