

Hofstadter 问题以及在玻色冷原子上的模拟

Jiaqi Cai

School of Physics
HUST

caidish@hust.edu.cn

2017 年 4 月 11 日



1 二维方格子上的 Hofstadter 问题

- 体系的哈密顿
- 磁场位移算符
- 超晶格——格子的扩展映射
- 对角化哈密顿与单粒子能谱

2 Hofstadter 能带的拓扑学性质

- Chern Number
- Diophantine 方程

3 光晶格中的超冷原子体系

- 周期驱动量子系统
- 例：一维体系的周期驱动

4 超冷原子体系中的 Chern-Number 测量

- 磁场下的方格子中的霍尔效应
- 映射到冷原子体系
- 可观测的物理效应

5 参考文献



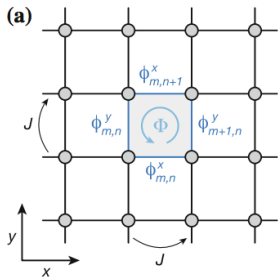


图: 磁场中的二维方格子

简单地，我们可以写出这个体系的哈密顿：

$$\hat{H} = -J \sum_{m,n} (e^{i\phi_{m,n}^x} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} + e^{i\phi_{m,n}^y} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n}) + h.c.$$



定义磁场位移算符

$$\hat{H} = -J \sum_{m,n} (e^{i\phi_{m,n}^x} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} + e^{i\phi_{m,n}^y} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n}) + h.c.$$

$$\phi_{m,n}^x = \frac{e}{\hbar} \int_m^{m+1} \vec{A} d\vec{x} \dots \dots \phi_{m,n}^y = \frac{e}{\hbar} \int_n^{n+1} \vec{A} d\vec{y}$$

由无磁场极限下，格点平移算符的启发，我们会定义磁场平移算符如下：

$$T_x = e^{i\phi_{m,n}^x} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n}, \quad T_y = e^{i\phi_{m,n}^y} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n}, \quad J = -1$$

然而，由于 $[T_x, T_y], [T_x, H], [T_y, H] \neq 0$ ，这样的定义是失败的。



定义磁场位移算符

我们考虑如下的定义：

$$T_x = \sum e^{i\theta_{m,n}^x} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n}$$
$$T_y = \sum e^{i\theta_{m,n}^y} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n}$$

使得 $[T_x, H], [T_y, H] = 0$
一些计算后给出：

$$\theta_{m,n}^x = \phi_{m,n}^x + \Phi_{m,n} n$$
$$\theta_{m,n}^y = \phi_{m,n}^y - \Phi_{m,n} m$$

其中 $\Phi_{m,n}$ 是一个格子上的总磁通：

$$\Phi_{m,n} = \phi_{m,n}^x + \phi_{m+1,n}^y - \phi_{m,n+1}^x - \phi_{m,n}^y$$

注意上二式不是对所有类型格子通用的，但是推导是类似的。



磁场位移算符的对易关系

从推导出，我们显然有 $[T_x, H], [T_y, H] = 0$ ，然而 T_x, T_y 的对易关系没有保证，可以简单的从单粒子态出发，证明（板书）：

$$T_x T_y = e^{i\Phi_{m,n}} T_y T_x$$

之后，我们考虑磁场是一个匀强磁场：



匀强磁场简化

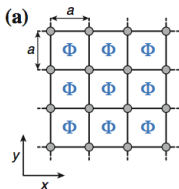


图: 匀强磁场下的方格子

我们考虑所加的磁场是一个匀强磁场的情况:

$$T_x T_y = e^{i\Phi} T_y T_x$$

现在我们的问题就是从 T_x, T_y 出发, 构造一套相互对易的算符。对于 $\Phi = 2n\pi$ 的情况, 这 and 单位格子无磁场是规范等价的, T_x, T_y 是对易的, H 可以通常的 (利用布洛赫定理) 被解出。



超晶格 (super-cell)

考虑 $M_x^k = (T_x)^k$, $M_y^l = (T_y)^l$, 这两个算符是与哈密顿算符对易的。问题成为, 选取合适的 k, l 使得 M_y^l, M_x^k 对易。通过单粒子态计算 (板书) 得到:

$$M_x^k M_y^l = e^{ikl\Phi} M_x^k M_y^l$$

对于分数的 $\Phi = p/q$, 两个算符对易的条件是:

$$kl\Phi = 2\pi (p/q) kl \doteq 2\pi n, n = 1, 2, 3\dots$$

最小的模式显然是 $kl = q$

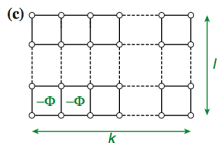


图:



扩展格子的布洛赫定理

下面，可以从 M_x, M_y 对应的“磁场平移对称性”应用布洛赫定理：

$$M_x^q \varphi_{m,n} = e^{i \sum \dots} \varphi_{m+q,n} = e^{ik_x qa} \varphi_{m,n}$$

$$M_y^l \varphi_{m,n} = e^{i \sum \dots} \varphi_{m,n+l} = e^{ik_y qa} \varphi_{m,n}$$

$$\frac{-\pi}{qa} \leq k_x < \frac{\pi}{qa}, \quad \frac{-\pi}{la} \leq k_y < \frac{\pi}{la}$$



上述体系，考虑使用朗道规范

$$\phi_{m,n}^{\vec{r}} = (-n\Phi, 0)$$

哈密顿就是 (Harper-Hofstadter Hamiltonian):

$$\hat{H} = -J \sum_{m,n} (e^{-in\Phi} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} + a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n}) + h.c.$$

考虑到沿 y 方向延拓 q 倍的情况:

$$M_x^1 = \sum_{m,n} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n}, M_y^q = \sum_{m,n} a_{m,n+q}^\dagger a_{m,n}$$



哈密顿不显含时间, $[H, T] = 0$, 因此存在 $\Psi_{m,n}$:

$$-J(e^{-i\Phi n}\Psi_{m+1,n} + e^{-i\Phi n}\Psi_{m-1,n} + \Psi_{m,n+1} + \Psi_{m,n-1}) = E_{m,n}\Psi_{m,n}$$

此外, $[M_x^1, H] = 0, [M_y^q, H] = 0$, 因此 $\Psi_{m,n}$ 也是这两个磁场位移算符的本征函数, 此外这两个算符还有布洛赫定理。

应用布洛赫定理, $\Psi_{m,n}$ 有如下性质:

$$M_x^1\Psi_{m,n} = \Psi_{m+1,n} = e^{ik_x a}\Psi_{m,n}$$

$$M_y^q\Psi_{m,n} = \Psi_{m,n+q} = e^{ik_x q a}\Psi_{m,n}$$

上二式给出了一个展开:

$$\Psi_{m,n}(\vec{k}) = e^{ik_x m a} e^{ik_y n a} \psi_n, \psi_{n+q} = \psi_n$$



Harper 方程

将展开后的哈密顿带入本征值方程，得到：

$$E_n(\vec{k})\psi_n = -J[2 \cos(k_x a - \Phi n)\psi_n + e^{ik_y a}\psi_{n+1} + e^{-ik_y a}\psi_{n-1}]$$

右边给出了一个 $q \times q$ 的哈密顿：

$$-J \begin{pmatrix} h_1 & e^{ik_y a} & 0 & \dots & e^{-ik_y a} \\ & h_2 & e^{ik_y a} & \dots & 0 \\ & & h_3 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & h_q \end{pmatrix}$$

$$h_q = 2 \cos(k_x a - (q-1)\Phi)$$

这个矩阵的本征值问题，就给出了 Harper 方程，给出了此问题的单粒子激发能谱。



Hofstadter-Butterfly

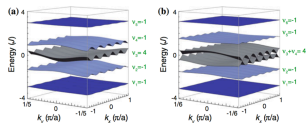


图: $q=5, q=6$ 的能谱, 侧边给出了 Chern Number

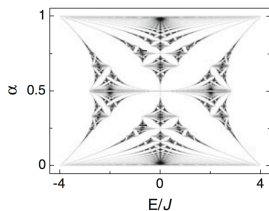


图: 大磁场下的分形, 即 Hofstadter-Butterfly



Hofstadter 能带的 Chern Number

$$Ch_1^\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{FBZ} dk_x dk_y - i \left(\langle \partial_{k_x} \psi_\mu(\vec{k}) \mid \partial_{k_y} \psi_\mu(\vec{k}) \rangle - x \leftrightarrow y \right)$$

由于未加磁场，诸能带都是平带 (topological trivial)，局域的时间反演对称性没有被打破，因此其上的 Chern Number 一定是 0。

在磁场作用下，能带发生劈裂，局域的时间反演对称性被打破，劈裂出来的新带的 Chern Number (不是 0) 总和是原来的带的 Chern Number 的总和。



Hofstadter 能带的 Chern Number

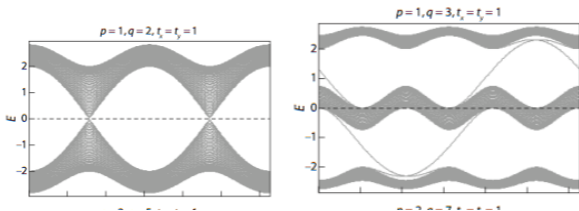


图: $q=2, q=3$ 能谱

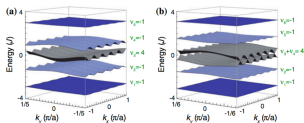


图: $q=5, q=6$ 的能谱



Hofstadter 能带的 Chern Number

由上面的分析，一些数学上的论证给出：

$$\Phi = 2\pi\alpha, \alpha = p/q$$

$$r = qs_r + pt_r, |t_r| \leq q/2, s_r, t_r = 0, 1, 2, \dots$$

其中， r 是第 r 个能隙， t_r 给出了能隙以下各个能带的 Chern Number 的和。上述方程就是 Diophantine 方程，结合边界条件，可以给出对 Chern Number 有效的预测。



周期驱动

考虑算符

$$\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$$

其薛定谔方程

$$i\hbar\partial_t |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle$$

应用时间平移算符，考虑其 Floquet 模：

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_a \exp(-i\varepsilon_a t/\hbar) |\Phi_a(t)\rangle, \Phi_a(t+T) = \Phi_a(t)$$

带入薛定谔方程、利用演化算符（板书）映射到不含时情况。



一维体系

考虑哈密顿

$$H(t) = -J_x \sum_m (a_{m+1}^\dagger a_m + h.c.) + \sum_m (V_0 \sin(\omega t + \varphi_m) + \Delta_m) a_m^\dagger a_m$$

利用么正演化

$$R(t) = \exp \left[i \sum_m \left(-\frac{V_0}{\hbar\omega} \cos(\omega t + \varphi_m) + \Delta_m t / \hbar \right) a_m^\dagger a_m \right]$$

将哈密顿旋转至：

$$\mathcal{H}(t) = -J_x \sum_m e^{i\varphi_m(t)} a_{m+1}^\dagger a_m$$

此例子可以推广到二维，从而获得我们想要的系统。



二维体系：人造规范势

考虑下面一个二维方格子的哈密顿：

$$H(t) = \sum_m (-J_x a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} - J_y a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n} + h.c.) + \sum_m (V_0 \sin(\omega t + \varphi_{m,n}))$$

利用么正演化

$$R(t) = \exp \left[i \sum_{m,n} \left(-\frac{V_0}{\hbar\omega} \cos(\omega t + \varphi_{m,n}) + \Delta_{m,n} t / \hbar \right) a_{m,n}^\dagger a_{m,n} \right]$$

哈密顿旋转为：

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{m,n} (-J_x e^{i\phi_{m,n}^x(t)} a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} - J_y e^{i\phi_{m,n}^y(t)} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n} + h.c.)$$

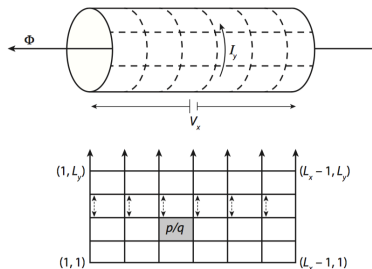
多次操作以后：

$$\mathcal{H}^F = \sum_{m,n} \begin{aligned} & -J_x \mathcal{J}_1(\phi_{0,x}) a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} \\ & -J_y \mathcal{J}_0(\phi_{0,y}) e^{i\phi_{m,n}^y(t)} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n} \end{aligned} + h.c.$$



磁场下的霍尔效应

考虑一个截断了边界的二维方格子：



图：霍尔效应示意图

计算（板书）得出： $\sigma_{xy} = I_y/V_x = n \frac{e^2}{2\pi\hbar}$



由霍尔电导对应的输运量

考虑一个有限大的冷原子云，现在，给予一个外力驱动：

$$\vec{F} = F\hat{e}_y$$

同上的想法，我们现在考虑 band velocity，但现在输运包含 Berry Curvature 和动力学因素：

$$\begin{aligned}v_{\mu}^x &= \partial_{k_x} E_{\mu} - F\mathcal{F}_{\mu}^{yx} \\v_{\mu}^y &= \partial_{k_y} E_{\mu}\end{aligned}$$

如果我们考虑他们在 x, y 方向的平均：

$$\langle v_{\mu}^x \rangle_{FBZ} = \langle \partial_{k_x} E_{\mu} \rangle_{k_x} - F \langle \mathcal{F}_{\mu}^{yx} \rangle_{FBZ} = -\text{tr}(\rho_{\mu}) F \times 2\pi C h_{\mu}^1$$



质量中心 (COM)

粒子数在能带上的分布:

$$\rho_{\mu} = \frac{1}{A_{FBZ}} \frac{N_{\mu}}{N} \equiv \frac{1}{A_{FBZ}} \eta_{\mu}$$

当力足够小, $\rho_{\mu}(t) = \rho_{\mu}(0)$ 时, 考虑可观测量 COM 的位移:

$$x_{\mu}(t) = (2a^2 \eta_{\mu}^0 F / \pi) v_{\mu} t$$

从而给出了 Chern Number。



原文章实验结果

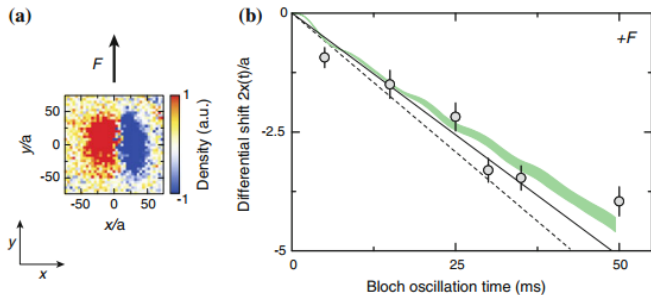


图: 实验结果



- Aidelsburger, M., Lohse, M., Schweizer, C., Atala, M., Barreiro, J. T., Nascimbène, S., ...Goldman, N. (2015). Measuring the Chern number of Hofstadter bands with ultracold bosonic atoms, 11(February), 1–5. <https://doi.org/10.1038/NPHYS3171>
- Bansil, A., Lin, H., & Das, T. (2016). Colloquium: Topological band theory. *Reviews of Modern Physics*, 88(2), 1–37. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.021004>
- Aidelsburger, M., Atala, M., Nascimbène, S., Trotzky, S., Chen, Y. -a., & Bloch, I. (2011). Experimental Realization of Strong Effective Magnetic Fields in an Optical Lattice. *Physical Review Letters*, 107(25), 1–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.255301>

